I) Etude de la nature et somme d'une série

Exercice 1: ★ *b.01.001*

Etudier la nature des séries de terme général :

1. $\ln\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \ln\left(\sin\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$
2. $\frac{n^n}{(2n)!}$
3. $\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt[3]{n^3+\alpha n^2+\beta n+\gamma}$
4. $(-1)^n\left(\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$
5. $\sin\left(\frac{\pi}{n}(n^2+an+b)\right)$
6. $\frac{1}{\sum_{k=2}^{n}\ln k}$
7. $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$

Exercice 2: ★ *d.15.001*

Déterminer la nature des séries qui suivent :

1. $\sum \frac{n^n}{e^n n!}$
2. $\sum \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$
3. $\sum \frac{1}{2^{\sqrt{n}}}$

Exercice 3: ★ *d.15.002*

Déterminer la nature de $\sum\limits_{n\geqslant 1}\frac{1}{d_n^2}$ avec d_n le nombre de diviseurs positifs de n.

Exercice 4: ★ *b.01.002*

Nature de la série de terme général $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{t\sin t}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 5: ★ *d.15.008*

Déterminer la nature de $\sum u_n$ pour :

1. $u_n = \frac{(-1)^n}{n^2+1}$
2. $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$
3. $u_n = \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n+1}\right)$

4. $u_n = (-1)^n \dfrac{\ln n}{n}$

Exercice 6: ★ *d.15.022*

Soient $p \in \mathbb{N}$ et $\alpha > 0$. Déterminer la nature des séries de termes généraux

$$v_n = \binom{n+p}{p}^{-\alpha} \text{ et } w_n = (-1)^n \binom{n+p}{p}^{-\alpha}$$

Exercice 7: ★ *d.15.041*

Déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{1}{\binom{2n}{n}}$.

Exercice 8: ★ *d.15.044*

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Vérifier l'identité :

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

2. En déduire la valeur de la somme harmonique alternée :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

Exercice 9: ★ *d.15.064*

Selon la valeur du paramètre réel α, déterminer la nature de la série

$$\sum \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$$

Exercice 10: ★ *d.15.046*

Existence et valeur de $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$

Exercice 11: ★★ *b.01.003*

Montrer la convergence et calculer la somme des séries suivantes. On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(2n+1)}$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n+1)^2}$
4. $\displaystyle\sum_{n=1, n\neq p}^{\infty} \frac{1}{n^2-p^2}$

Exercice 12: ★★ *b.01.009*

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle décroissante qui converge vers 0. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = n(u_n - u_{n+1})$. Montrer que $\sum u_n$ converge *si et seulement si* $\sum v_n$ converge et que dans ce cas les deux séries ont la même somme.

Exercice 13: ★★ *b.01.012*

Soit $\sum a_n$ une série divergente à terme général positif. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum \frac{a_n}{1+a_n}$.

Exercice 14: ★★ *d.15.003*

1. Etudier $\sum u_n$ où $\displaystyle u_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x+...+x^n}$.
2. Etudier $\sum v_n$ où $\displaystyle v_n = \int_0^1 \frac{x^n dx}{1+x+...+x^n}$.

Exercice 15: ★★ *d.15.004*

Pour $a > 0$, étudier la convergence de

$$\sum_{n\geqslant 1} a^{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}$$

Exercice 16: ★★ *d.15.017*

Nature de $\displaystyle\sum (-1)^n \frac{\sin(\ln(n))}{n}$?

Exercice 17: ★★ *d.15.021*

Donner un exemple de série divergente dont le terme général tend vers 0 et dont les sommes partielles sont bornées.

Exercice 18: ★★★ *b.01.005*

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^*)$. On suppose que $\dfrac{f'(x)}{f(x)} \to -\infty$ quand $x \to +\infty$.

1. Montrer que $\sum f(n)$ converge.
2. Donner un équivalent du reste de la série.

Exercice 19: ★★★ *b.01.010*

Soit σ une permutation de $\mathbb{N}^*$. Quelle est la nature de $\sum \dfrac{\sigma(n)}{n^2}$?

Exercice 20: ★★★ *b.01.013*

Soit $\sum\limits_{n\geqslant 0} x_n$ une série absolument convergente à termes réels.

1. Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0} |x_n|^p$ converge pour tout réel $p \geqslant 1$.
2. Déterminer la limite, lorsque $p \to \infty$ de $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p}$.

Exercice 21: ★★★ *b.01.014*

Soient (a_n) et (b_n) deux suites d'éléments de $\mathbb{R}_+$ telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} \leqslant a_n + b_n$ et que $\sum b_n$ converge. Montrer que (a_n) converge.

Exercice 22: ★★★ *b.01.015*

Soit $(u_n) \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ telle que $u_0 = 1$, $\sum u_n$ converge et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{2n} + u_{2n+1}$.
Calculer $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$.

Exercice 23: ★★★ *d.15.019*

Nature de $\sum \dfrac{e^{i\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$?

II) Sommabilité

Exercice 24: ★ *b.01.018*

On pose pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, $a_{p,q} = \begin{cases} \dfrac{1}{p^2-q^2} & \text{si} p \neq q \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Calculer $\displaystyle\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty} a_{p,q}$ et $\displaystyle\sum_{q=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty} a_{p,q}$. En déduire que la famille n'est pas sommable.

Exercice 25: ★ *b.01.021*

Montrer que pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, on a l'égalité : $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{1-x^{2n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^{2n}}$.

Exercice 26: ★★ *b.01.019*

Montrer la convergence et calculer les sommes suivantes (éventuellement en fonction des $\zeta(k)$) :

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k!}$
2. $\displaystyle\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=p}^{\infty} \frac{(-1)^p}{q^3}$
3. $\displaystyle\sum_{\substack{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2 \\ p|q}} \frac{1}{p^2q^2}$
4. $\displaystyle\sum_{\substack{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2 \\ p\wedge q=1}} \frac{1}{p^2q^2}$

Exercice 27: ★★ *p.01*

1. Considérons la famille $\left(\dfrac{1}{(i+j)^\alpha}\right)_{(i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2}$. Pour quelles valeurs de α est-elle sommable ?
2. *Généralisation* ★★★ : Considérons la famille $\left(\dfrac{1}{(|x_1|+\ldots+|x_d|)^\alpha}\right)_{(x_1,\ldots,x_d)\in\mathbb{Z}^d\setminus\{0_{\mathbb{Z}^d}\}}$. Montrer que la famille est sommable *si et seulement si $\alpha > d$.*

Exercice 28: ★★★ *b.01.024*

On pose $\Lambda : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$ telle que $\Lambda(p^k) = \ln(p)$ pour tout nombre premier p et $k \in \mathbb{N}^*$ et 0 sinon. On note $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombre premiers.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{d|n} \Lambda(d) = \ln(n)$.

2. Montrer que pour tout $s > 1$, $\left(\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\Lambda(n)}{n^s}\right)\left(\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^s}\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\ln(n)}{n^s}$.
3. Montrer que pour tout $s > 1$, $\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{\ln(p)}{p^s} = \frac{1}{s-1} + \mathcal{O}_{s\to 1^+}(1)$.
4. Montrer que pour tout $s > 1$, $\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p^s} = \ln\left(\frac{1}{s-1}\right) + \mathcal{O}_{s\to 1^+}(1)$. Qu'en déduire ?

III) Exemples et contre-exemples, suites

A) Convergence, divergence, monotonie, caractère borné, équivalents

Exercice 29: ★ *h.6.1*

Trouver une suite bornée divergente.

Exercice 30: ★ *h.6.5*

Trouver une suite de limite nulle qui n'est pas monotone.

Exercice 31: ★★ *h.6.3*

Trouver une suite (x_n) divergente telle que, pour tout entier $k \geqslant 1$, $\lim_{n\to\infty} x_{n+k} - x_n = 0$.

Exercice 32: ★★ *h.6.4*

Trouver une suite (x_n) convergente et une fonction f continue telles que la suite image $(f(x_n))$ diverge.

Exercice 33: ★★ *h.6.6*

Trouver une suite positive de limite nulle qui n'est pas monotone.

Exercice 34: ★★★ *h.6.2*

Trouver deux suites $(x_n)_{n\geqslant 1}$ et $(y_n)_{n\geqslant 1}$ telles que $x_n \sim y_n$ mais telles que leurs "suites-logarithmes" (*ie* $(\ln x_n)$ et $(\ln y_n)$) ne soient pas équivalentes.

B) Cesàro

Soit $(x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite. Soit $(\mathcal{C}(x_n))_{n\geqslant 1}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{C}(x_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$$

On dit que (x_n) converge **au sens de Cesàro** lorsque la suite $(\mathcal{C}(x_n))$ converge.
Cette définition est évidemment à mettre en perspective avec le théorème de Cesàro, qui dit que **toute suite convergente converge au sens de Cesàro**.

Exercice 35: ★ *h.6.8*

Trouver une suite divergente qui converge au sens de Cesàro.

Exercice 36: ★ *d.15.097*

Lemme de l'escalier.
Soit (u_n) une suite réelle telle que $u_{n+1} - u_n \to 1$.
Déterminer un équivalent de u_n quand $n \to \infty$.

La réciproque du théorème de Cesàro est donc fausse : la convergence au sens de Cesàro est plus faible que la convergence simple.

Exercice 37: ★★ *h.6.9*

Trouver une suite qui ne diverge pas vers $+\infty$ mais qui tend vers $+\infty$ au sens de Cesàro.

IV) Exemples et contre-exemples, séries

A) Convergence et convergence absolue

Exercice 38: ★ *h.7.1*

Trouver une suite (u_n) qui converge vers 0 alors que la série $\sum u_n$ diverge. *Il faut bien montrer que cette série diverge.*

Exercice 39: ★ *h.7.2*

Trouver une série qui converge mais qui ne converge pas absolument.

Exercice 40: ★ *h.7.3, h.7.4*

Trouver deux suites (u_n) et (v_n) telles que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| < |v_n|$, et pour lesquelles la série $\sum v_n$ converge alors que $\sum u_n$ diverge.
De même, trouver deux suites (u_n) et (v_n) telles que $|u_n| = o(|v_n|)$, et pour lesquelles

la série $\sum v_n$ converge alors que $\sum u_n$ diverge.
Quelle hypothèse faut-il ajouter sur (u_n) pour que les résultats soit vrai ?

B) Mise en défaut de certains critères de convergence

Exercice 41: ★★ *h.7.6*

Trouver deux suites (u_n) et (v_n) équivalentes telles que $\sum u_n$ diverge alors que $\sum v_n$ converge.

Exercice 42: ★★ *h.7.9*

Trouver une série divergente $\sum (-1)^n v_n$ où $v_n \geqslant 0$ pour tout n et où la suite (v_n) converge vers 0.

C) Séries à termes positifs

Exercice 43: ★ *b.01.025*

Existe-t-il une suite (u_n) à valeurs réelles strictement positives telle que $\sum u_n$ converge et telle que $\ln u_n \sim -\ln n$?

Exercice 44: ★★ *b.01.026*

Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs.

1. Suffit-il que (na_n) tende vers 0 pour que la série $\sum a_n$ converge ?
2. La convergence de $\sum a_n$ entraîne-t-elle que (na_n) tende vers 0 ?
3. Si la suite (a_n) est décroissante, montrer que si $\sum a_n$ converge, alors $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$.

D) Séries doubles et produit de Cauchy

Exercice 45: ★★ *h.7.26, h.7.27*

1. Posons (u_n) la suite définie par $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$. Montrer que la série $\sum u_n$ converge, mais que le produit de Cauchy de la suite (u_n) par elle-même diverge.
2. Posons les suites (u_n) et (v_n) de termes généraux : $u_n = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 0 \\ 2^n & \text{si } n \geqslant 1 \end{cases}$ et $v_n = \begin{cases} -1 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n \geqslant 1 \end{cases}$.

Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent mais que leur produit de Cauchy converge.

V) Comparaisons série-intégrale

Exercice 46: ★ *d.15.075*

Déterminer un équivalent simple quand n tend vers $+\infty$ de

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$$

Exercice 47: ★ *d.15.076*

A l'aide d'une comparaison avec une intégrale, déterminer un équivalent simple quand $n \to +\infty$ de $\ln(n!)$.

Exercice 48: ★★ *d.15.065*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit

$$f_n : x \in]n; +\infty[\mapsto \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x-k}$$

1. Soit $a > 0$. Montrer qu'il existe un unique réel, noté x_n, tel que $f_n(x_n) = a$.
2. Déterminer un équivalent de x_n.

Exercice 49: ★★ *d.15.066*

Soit $f : [0; +\infty[\mapsto \mathbb{R}$ continue, positive et croissante.
Etablir que $\displaystyle\int_0^{\infty} f(e^{-t})dt$, $\sum f(e^{-n})$ et $\sum \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$ ont même nature.

Exercice 50: ★★ *b.01.040*

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k^2$. On suppose que $a_n S_n \to 1$.

1. Montrer que $\sum a_n^2$ diverge.
2. Donner un équivalent de a_n.

Exercice 51: ★★★ *d.15.073*

Etudier $\lim\limits_{n\to+\infty} n\sum\limits_{k=n}^{\infty} \dfrac{e^{\frac{n}{k}}}{k^2}$.

VI) Règle de Raabe-Duhamel

Exercice 52: ★★ *p.02*

1. On se donne deux réels $a, b > 0$ et on pose pour tout entier n :

$$u_n = \frac{a(a+1)...(a+n)}{b(b+1)...(b+n)}$$

   En utilisant la règle de Raabe-Duhamel, énoncer une CNS sur le couple (a, b) pour que la série $\sum u_n$ converge.

2. Pour tout $n \geqslant 2$, on pose $v_n = \sqrt{n!}\prod\limits_{k=1}^{n} \sin\dfrac{1}{\sqrt{k}}$. Déterminer la nature de la série $\sum v_n$.

Exercice 53: ★★ *b.01.029*

Soient $a, b > 0$ et (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+a}{n+b}$. Etudier la nature de la série de terme général u_n et calculer la somme.

VII) Suites récurrentes et développements asymptotiques

Exercice 54: ★ *b.01.038*

La suite (u_n) est définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$.

1. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
2. Déterminer un équivalent de u_n.

Exercice 55: ★ *b.01.042*

Soit $a \in \mathbb{R}^*$. On définit par récurrence la suite u par les conditions $u_0 = a$ et pour $n \geqslant 1$, $u_n = \tanh(u_{n-1})$.

1. Montrer la convergence de la suite u.
2. Donner un équivalent puis un développement asymptotique à deux termes de u_n.

Exercice 56: ★ *d.15.080*

On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+\sqrt{k}}$.

1. Donner un équivalent simple de S_n.
2. Montrer qu'il existe une constante réelle C permettant d'écrire

$$S_n = \ln(n) + C + o(1)$$

Exercice 57: ★★ *b.01.039*

On considère la suite définie par $u_0 \in]0;1[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

1. Etudier la suite (monotonie, limite) et en donner un équivalent.
2. Nature des séries $\sum u_n$ et $\sum u_n^2$.
3. Donner un développement asymptotique à deux termes de u_n.

Exercice 58: ★★ *d.15.055*

Existence et calcul de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n+6}{n(n+1)(n+2)}$.

Exercice 59: ★★ *d.15.058*

Existence et calcul de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} k^2}$.

Exercice 60: ★★ *d.15.089*

On pose $u_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{3k-1}{3k}$.

1. Montrer qu'il existe des constantes α et β telles que $\ln(u_n) = \alpha \ln(n) + \beta + o(1)$.
2. En déduire un équivalent de u_n.
3. Déterminer la nature de $\sum u_n$.
4. Déterminer la nature de $\sum (-1)^n u_n$.

Exercice 61: ★★ *d.15.107*

Soit (u_n) une suite réelle telle que $u_0 > 0$ et pour tout $n > 0$, $u_n = \ln(1+u_{n-1})$. Etudier la suite (u_n) puis la série de terme général u_n.

Exercice 62: ★★★ *b.01.045*

Soit (a_n) une suite décroissante positive, $0 < a < 1$ et $c > 0$. Montrer que $a_n \sim \dfrac{c}{n^a}$ *si et seulement si* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \sim \frac{cn^{1-a}}{1-a}$.

VIII) Transformation d'Abel

Exercice 63: ★★ *d.15.035*

Soit (a_n) une suite réelle. On suppose que les séries $\sum a_n$ et $\sum |a_{n+1} - a_n|$ convergent. Montrer que la série $\sum a_n^2$ converge.

Exercice 64: ★★ *b.01.048*

Soient $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes dans $\{-1, 1\}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de réels positifs telle que $\sum \varepsilon_n a_n$ converge. Montrer que $a_n \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k \to 0$.

IX) Applications

Exercice 65: ★★ *d.15.123*

On cherche à établir la formule de Stirling. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $\sigma_n = \ln(n!) - \left(n + \dfrac{1}{2}\right) \ln(n) + n$.

1. Montrer la convergence de la suite $(\sigma_n)_{n\geqslant 1}$ et en déduire l'existence d'une constante C telle que
$$n! \sim Cn^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}$$
2. Calculer C en admettant que
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^{2n}\, dt \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$$

Exercice 66: ★★ *d.15.129*

Critère de condensation de Cauchy.

1. Soient (u_n) une suite réelle décroissante, positive et $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \geqslant 2$. On pose $v_n = p^n u_{p^n}$. Montrer que $\sum u_n$ converge *si et seulement si* $\sum v_n$ converge.

2. *Application* : étudier la convergence des séries $\sum \frac{1}{n\ln(n)}$ et $\sum \frac{1}{n\ln(n)\ln(\ln(n))}$.

Exercice 67: ★★★ *b.01.057*

Pour tout $n \geqslant 2$, on note $P(n) = \max\{p \in \mathbb{P}, p|n\}$. On souhaite étudier la convergence de la série $\sum \frac{1}{nP(n)}$, en utilisant des regroupements par paquets.

1. On note q_n le n-ième nombre premier, montrer que $\forall k \geqslant 1, q_k \geqslant 2k-1$.
   On pose $A_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1-\frac{1}{q_k}}$.
2. Montrer que $\sum \frac{1}{nP(n)}$ converge *si et seulement si* $\sum \frac{A_n}{q_n^2}$ converge et qu'elles ont même somme en cas de convergence.
3. Montrer que $\forall n \geqslant 2, \ln(A_n) \leqslant \ln(2) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j} \leqslant \ln(2) + \frac{1}{2}\ln(n)$.
4. Conclure.